Zadaci iz Matematike u Inženjerskom menadžmentu

1. Naći maksimum funkcije cilja $F = 2x + y$ uz ograničenja

   $x - y \le 5$;

   $x + 2y \le 8$;

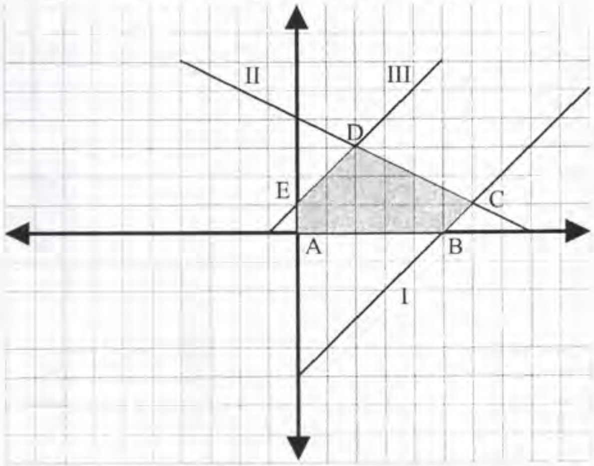
   $x - y \ge -1$;

   $x \ge 0, y \ge 0$

Rešenje:

Ovo je zadatak linearnog programiranja i koristimo grafički metod. Određujemo dopustivu oblast rešenja pomoću pravih

$I: x - y = 5$; $II: x + 2y = 8$; $III: x - y = -1$; $x = 0$; $y = 0$.



Određujemo presečne tačke koje su temena dopustive oblasti rešenja:

$A(0,0)$; $B(5,0)$; $E(0,1)$

$C: I \times II$: $\left.\begin{matrix} x - y = 5 \\ x + 2y = 8 \end{matrix}\right\} C(6,1)$

$D: II \times III$: $\left.\begin{matrix} x + 2y = 8 \\ x - y = -1 \end{matrix}\right\} D(2,3)$

Maksimum funkcije cilje biće u nekoj od određenih tačaka, pa izračunavamo vrednosti funkcije cilja u svakoj od njih:

$F = 2x + y$; $F(A) = 0$; $F(B) = 10$; $F(C) = 13$; $F(D) = 7$; $F(E) = 1$.

Na osnovu dobijenih rezultat, zaključujemo da je maksimum funkcije cilja 13 koji ona dostiže za $x = 6, y = 1$.

2. Fabrika proizvodi dva modela automobila na I i II mašini. Za izradu prvog modela prva mašina radi 2 sata a druga 4 sata po autu, dok je za izdradu drugog modela potrebno da prva mašina radi 6 sati a druga 4 sata po autu. Ako je zarada 3000 evra po prvom modelu i 5000 evra po drugom modelu, odrediti kako da se organizuje proizvodnja tako da zarada bude što veća, imajući u vidu da se mašine mogu koristiti 24 časa dnevno.

Rešenje:

Matematički model ovog zadatke odgovara problemu lineranog programiranja. Treba da odredimo optimalnu proizvodnju automobila po modelima imajuci u vidu date uslove. Obeležimo sa x i y broj proizvedenih automobila redom prvog i drugog modela.

	prvi model (x)	drugi model (y)
I mašina	2h	6h
II mašina	4h	4h

Funkcija cilja kojoj treba naći maksimum je $F = 3000x + 5000y$ uz ograničenja

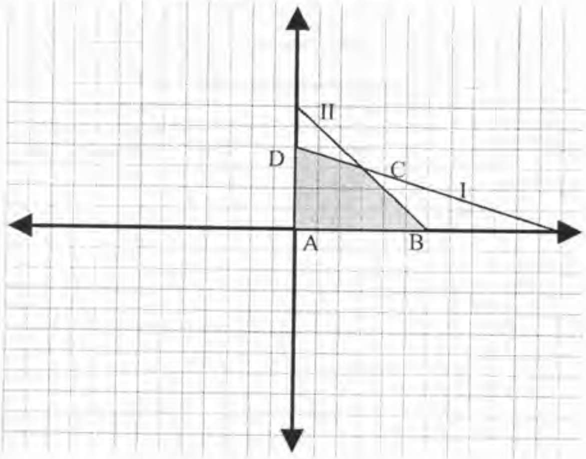
$2x + 6y \leq 24$;

$4x + 4y \leq 24$;

$x \geq 0, y \geq 0.$

Određujemo dopustivu oblast rešenja pomoću pravih

$I: 2x + 6y = 24$; $II: 4x + 3y = 24$; $x = 0$; $y = 0$.



Određujemo presečne tačke koje su temena dopustive oblasti rešenja:

$A(0,0)$; $B(6,0)$; $D(0,4)$

$C: I \times II$:

$$\left.\begin{array}{l} x + 3y = 12 \\ x + y = 6 \end{array}\right\} \quad C(3,3)$$

Maksimum funkcije cilje biće u nekoj od određenih tačaka, pa izračunavamo vrednosti funkcije cilja u svakoj od njih:

$F = 3000x + 5000y$; $F(A) = 0$; $F(B) = 18000$; $F(C) = 24000$; $F(D) = 20000$.

Na osnovu dobijenih rezultat, zaključujemo da je maksimum funkcije cilja koji ona dostiže za dnevnu proizvodnju od po tri automobila od svakog modela.

3. Trgovinsko preduzeće je u 2014. godini ostvarilo promet od 320 miliona dinara. Izračunati koliko se prometa može ukupno ostvariti u periodu 2014-2018 god ako se predviđa godišnji porast prometa a) 100 mil. dinara b) 20%.

Rešenje:

a) Uz konstantni godišnji porast prometa od 100 mil. dinara, godišnji prometi čine aritmetički niz čiji je prvi član 320, a razlika 100. Treba iyračunati ukupan promet u periodu od 2014. -2016, dakle u periodu od pet godina, pri čemu treba da izračunamo zbor prvih pet članova ovog aritmetičkog niza:

$a_1 = 320$; $d = 100$; $n = 5$;

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)\cdot d);$$

$$S_5 = \frac{5}{2}(2\cdot 320 + 4\cdot 100) = 2600.$$

b) Ako je porast prometa na godišnjem novou 20% u odnosu na predhodnu goinu, onda godišnji prometi čine geometrijski niz čiji je prvi član 320. Ako je odnos članova geometrijskog niza određen stopom povećanja (rasta) ili smanjenja (pada) u odnosu na predhodni član, onda je količnik $q = 1 + s$ odnosno $q = 1 - s$, gde je s stopa rasta (pada) . Treba da izračunamo zbir prvih pet članova ovog geometrijskog niza:

$a_1 = 320$; $s = 20\% = 0{,}2$; $q = 1 + s = 1 + 0{,}2 = 1{,}2$; $n = 5$;

$$S_n = a_1\frac{q^n - 1}{q-1}; \quad S_5 = 320\frac{1{,}2^5 - 1}{1{,}2 - 1} = 2381{,}31.$$

4. Fabrika automobila je 2012. godine proizvela 6000 automobila. Za koliko godina ova fabrika može da proizvede 40000 automobila (računajući i proizvodnju iz 2012. godine) ako je planiran godišnji porast proizvodnje od 1000 automobila?

Rešenje:

$$a_1 = 6000;\ d = 1000;\ S_n = 40000;\ S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)\cdot d);$$

$$40000 = \frac{n}{2}(2\cdot 6000 + (n-1)\cdot 1000) \Rightarrow 40000 = \frac{n}{2}(12000 + 1000n - 1000);$$

$$1000n^2 + 11000n - 80000 = 0;\quad n^2 + 11n - 80 = 0;$$

$$n_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{121 + 320}}{2} = \frac{-11 \pm 21}{2};\quad n_1 = -16;\ n_2 = 5;$$

S obzirom na prirodu veličine koja se traži, zaključujemo da negativno rešenje ne odgovara, pa je rešenje postavljenog problema $n_2 = 5$. Dakle, planirana proizvodnja se može realizovati u periodu 2012-2017 godine.

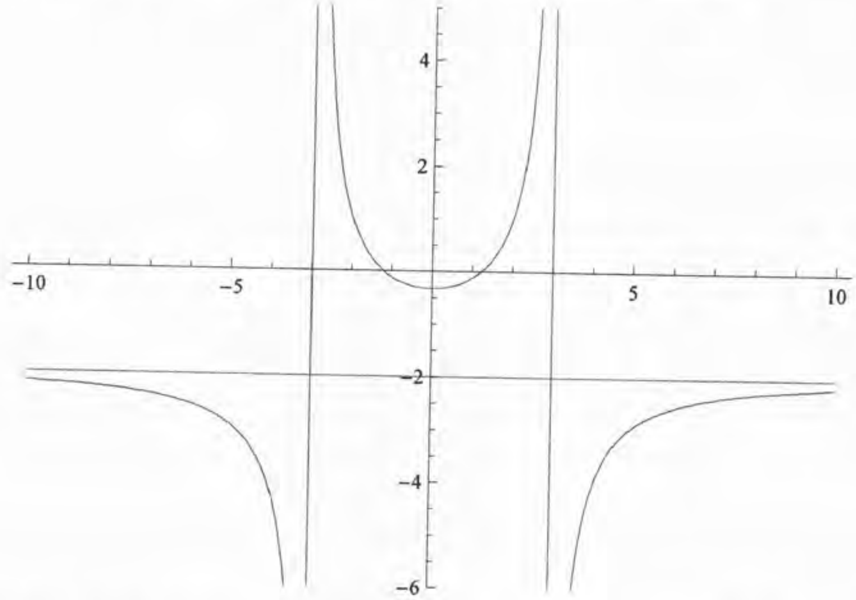
5. Jedna mašina vredi 120000 dinara. Koliku će vrednost imati za 8 godina ako je godišnja stopa otpisa 10% od vrednosti mašine u predhodnoj godini?

Rešenje:

$a_1 = 120000$; $s = -10\% = -0{,}1$; $q = 1 - s = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$; $n = 9$;

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 120000 \cdot 0{,}9^8 = 51656{,}1.$$

6. Pronađi funkciju kojoj odgovara grafik (Zaokruži tačan odgovor)



A) $\frac{2x^2-9}{x^2-3}$ B) $\frac{2x^2-3}{x^2-9}$ $\boxed{\text{C)}}$ $\frac{3-2x^2}{x^2-9}$ D) $\frac{3-2x^2}{x^2-3}$ E) $\frac{x^2-2x-9}{x^2-9}$

Uputstvo: Koristiti vertikalne i horizontalne asimptote kao i parnost funkcije.

7. Odrediti ekstremne vrednosti funkcije $f(x)=20\cdot x\cdot e^{\frac{-x}{20}+4}$.

Rešenje: Ekstremne vrednosti funkcije nalazimo korišćenjem prvog izvoda funkcije:

$f(x)=20\cdot x\cdot e^{\frac{-x}{20}+4}$;

$f'(x)=20\cdot e^{\frac{-x}{20}+4}+20\cdot x\cdot e^{\frac{-x}{20}+4}\cdot\left(\frac{-1}{20}\right)=e^{\frac{-x}{20}+4}(20-x)$;

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=20$

Našli smo stacionarnu tačku, ali treba proveriti da li u njoj funkcija ima ekstremnu vrednost I da li je u pitanju minimu ili maksimum. Ovo možemo uraditi ili pomoću drugog izvoda ili pomoću tablice za znak prvog izvoda. Ukoliko koristimo drugi izvod, dobijamo da je

$f''(x)=e^{\frac{-x}{20}+4}\cdot\left(\frac{-1}{20}\right)\cdot(20-x)+e^{\frac{-x}{20}+4}\cdot(-1)=e^{\frac{-x}{20}+4}\left(\frac{x}{20}-2\right)$;

$f''(20)=-e^3<0$

Zaključujemo da u $x=20$ funkcija ima ekstremnu vrednost i dostiže svoj maksimum. Ukoliko koristimo tablicu za znak prvog izvoda, imamo u vidu da je eksponencijalna funkcija uvek pozitivna.

8. Koja je najveća i najmanja vrednost koju funkcija $f(x)=x^3-12x+5$ dostiže na na intervalu $[-3,5]$.

Rešenje: Najmanja i najveća vrednost neprekidne funkcije na zatvorenom intervalu nalazi se korišćenjem ekstremnih vrednosti funkcije na tom intervalu kao i vrednosti funkcije na krajevima tog intervala. Korišćenjem prvog izvoda nalazimo

$f(x)=x^3-12x+5;\ f'(x)=3x^2-12;\ f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2=4 \Rightarrow x=2 \vee x=-2.$

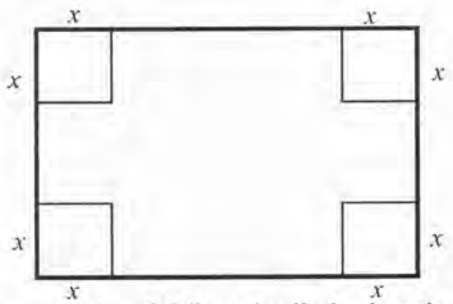
I jedna i druga stacionarna tačka pripadaju datom intervalu. Na osnovu drugog izvoda $f''(x)=6x;\ f''(-2)=-12<0;\ f''(2)=12>0;$ zaključujemo da u $x=-2$ data funkcija ima lokalni maksimum, koji iznosi $f(-2)=21$, dok u $x=2$ funkcija ima lokalni minimum koji iznosi $f(2)=-11$. Na krajevima intervala funkcija prima vrednosti

$f(-3)=14,\ f(5)=70,$

Pa zaključujemo da funkcija $f(x)=x^3-12x+5$ na intervalu $[-3,5]$ dostiže najmanju vrednost $f(2)=-11$ a najveću $f(5)=70$.

9. Od kartona oblika pravougaonika čije su dimenzije 30cm i 14 cm treba da se prave otvorene kutije najveće moguće zapremine. Odrediti dimenzije kutije.

Rešenje: Od datih pravougaonih kartona isecanjem kvadrata stranice x na svakom od ćoškova dobijamo karton od koga se savijanjem dobija kutija.



Treba odrediti x tako da zapremina dobijene kutije bude najveća. Dimenzije te kutije biće $a=30-2x;\ b=14-2x;\ c=x$, a njena zapremina

$V=abc=(30-2x)\cdot(14-2x)\cdot x=4x^3+-88x^2+420x.$

Odredimo vrednost x za koju je zapremina maksimalna:

$V'(x)=12x^2-176x+420=4(3x^2-44x+105);$

$V'(x)=0 \Rightarrow x=3 \vee x=\dfrac{35}{3};$

$V''(x)=24x-176;\quad V''(3)<0\ (\max);\quad V''(\tfrac{35}{3})>0\ (\min).$

$V_{\max}=V(3)=576.$

10. Dnevna tražnja za nekim artiklom je data sa $Q(P)=-P^2+10P+11$. Pri kojoj ceni P će tražnja biti maksimalna ?

Rešenje: $Q(P)=-P^2+10P+11 \Rightarrow Q'(P)=-2P+10;\ Q'(P)=0 \Rightarrow P=5;\quad Q''(P)=-2.$

Maksimalna proizvodnja se postiže pri ceni od $P=5$.

11. Data je funkcija ukupnog prihoda $TR(Q)=Q^2-2Q+6$ i funkcija ukupnih troškova $TC(Q)=2Q^2-6Q+1$. Odrediti:

a) Funkciju dobiti i interval rentabilne proizvodnje

b) Proizvodnju pri kojoj se ostvaruje maksimalna dobit kao i maksimalnu dobit.

Rešenje:

a) Funkciju dobiti računamo kao razliku između ukupnih prihoda i ukupnih troškova $\pi(Q) = TR(Q) - TC(Q) = (Q^2 - 2Q + 5) - (2Q^2 - 6Q) = -Q^2 + 4Q + 5$.

Interval rentabilne proiyvodnje je interval proizvodnje pri kojoj je dobit pozitivna $\pi(Q) > 0 \Leftrightarrow -Q^2 + 4Q + 5 > 0 \Leftrightarrow Q \in (-1,5)$. Imajući u vidu prirodu ekonomskih funkcia, te da proizvodnja nemože da bude negativna, zaključujemo da je interval rentabilne proizvodnje $Q \in (0,5)$.

b) Da bi odredili pri kojoj kojoj proizvodnji se ostvaruje maksimalna dobit, koristićemo prvi izvod funkcije dobiti

$\pi(Q) = -Q^2 + 4Q + 5 \Rightarrow \pi'(Q) = -2Q + 4;\ \pi'(Q) = 0 \Rightarrow Q = 2;\quad \pi''(Q) = -2 < 0$ (max).

Dakle, maksimalna dobite se ostvaruje pri $Q = 2$ (koje pripada intervalu rentabilne proizvodnje), i tada je dobit $\pi(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 + 5 = 9$.

12. Neka je funkcija ukupnih prihoda $TR(Q) = 8 + 11Q - Q^2$, a ukupih troškova $TC(Q) = \frac{1}{3}Q^3 - 6Q^2$, gde je Q količina proizvoda. Pri kojoj količini proizvoda je dobit najveća?

Rešenje:

$\pi(Q) = TR(Q) - TC(Q) = (8 + 11Q - Q^2) - (\frac{1}{3}Q^3 - 6Q^2) = -\frac{1}{3}Q^3 + 5Q^2 + 11Q + 8.$

$\Rightarrow \pi'(Q) = -Q^2 + 10Q + 11;\ \pi'(Q) = 0 \Rightarrow Q_1 = -1,\ Q_2 = 11.$

Odbacujemo negativno rešenje, i proveravamo da li za drugu vrednost funkcija ima minimum ili maksimum (pomoću drugog izvoda)

$\pi''(Q) = -2Q + 10;\ \pi''(11) = -12 < 0$ (max).

Zaključujemo da se pri proizvodnji od $Q = 11$ ostvaruje maksimalna dobit.

13. Date su funkcije prosečnih troškova i prosečnih prihoda jednog modela mobilnog telefona $AC(Q) = \frac{1}{3}Q^2 - 7Q + 20 + \frac{48}{Q}$, $AR(Q) = -2Q + 4 + \frac{20}{Q}$. Odrediti funkcije ukupnih troškova, ukupnih prihoda, marginalnih troškova i marginalnih prihoda kao i funkciju profita . Za koju količinu proizvida se ostvaruje optimalna proizvodnja?

Rešenje:

$$AC(Q) = \frac{TC(Q)}{Q} \wedge AC(Q) = \tfrac{1}{3}Q^2 - 7Q + 20 + \frac{28}{Q} \Rightarrow$$

$$TC(Q) = AC(Q) \cdot Q = \frac{1}{3}Q^3 - 7Q^2 + 20Q + 28;$$

$$AR(Q) = \frac{TR(Q)}{Q} \wedge AR(Q) = -2Q + 4 \Rightarrow TR(Q) = AR(Q) \cdot Q = -2Q^2 + 4Q;$$

$$MC(Q) = TC'(Q) = Q^2 - 14Q + 20; MR(Q) = TR'(Q) = -4Q + 4;$$

$$\pi(Q)=TR(Q)-TC(Q)=\left(-2Q^2+4Q\right)-\left(\tfrac{1}{3}Q^3-7Q^2+20Q+28\right);$$
$$\pi(Q)=-\frac{1}{3}Q^3+5Q^2-16Q-28;$$
$$\pi'(Q)=-Q^2+10Q-16;\quad \pi'(Q)=0\Rightarrow Q_1=2,\ Q_2=8;$$
$$\pi''(Q)=-2Q+10;\quad \pi''(2)=6>0\ (\text{min});\quad \pi''(8)=-6<0\ (\text{max}).$$
Optimalna proizvodnja se ostvaruje pri proizvodnji $Q=8$.

14. Date su funkcije ukupnih troškova $TC(Q)=6Q^2+50$ i funkcija tražnje $Q=-\frac{P}{4}+15$ jednog modela mobilnog telefona u zavisnosti od njgove cene P. Odrediti funkciju ukupnih prihoda $TR(Q)=P\cdot Q$. Za koju količinu proizvoda i pri kojoj ceni se ostvaruje optimalna proizvodnja? Kolika je maksimalna dobit ?

Rešenje: Kako treba odrediti funkciju prihoda u zavisnosti od količine proizvoda, to prvo treba da cenu izrazimo preko količine proizvoda:
$$Q=-\tfrac{P}{4}+15\Rightarrow -\frac{P}{4}=Q-15\Rightarrow P=60-4Q;$$
$$TR(Q)=P\cdot Q=(60-4Q)\cdot Q=60Q-4Q^2;$$
$$\pi(Q)=TR(Q)-TC(Q)=\left(60Q-4Q^2\right)-\left(6Q^2+50\right)=-10Q^2+60Q-50;$$
$$\pi'(Q)=-20Q+60;\ \pi'(Q)=0\Rightarrow Q=3;$$
$$\pi''(3)=-20<0\ (\text{max}).$$
Optimalna proizvodnja se ostvaruje pri $Q=3$.

15. Neka su funkcije marginalnih prihoda i marginalnih troškova definisane sa $MR(P)=4-2P$, $MC(Q)=4Q-14$, pri čemu je $TC(1)=12$.

a) Odrediti funkciju prihoda $TR(P)$ i funkciju troškova $TC(Q)$;

b) Odrediti funkciju tražnje $Q=Q(P)$ i funkciju cene $P=P(Q)$;

c) Odrediti funkciju prihoda $TR(Q)$ u zavisnosti od Q;

d) Odrediti funkciju dobiti $\pi=\pi(Q)$, optimalni obim proizvodnje i maksimalnu dobit.

f) Odrediti interval rentabilne proizvodnje.

Rešenje:

a) Ukupni prihodi i troškovi se dobijaju integracijom marginalnih:
$$TR(P)=\int(4-2P)dP=4P-P^2+C;\quad TR(0)=0\Rightarrow C=0;$$
$$TR(P)=4P-P^2;$$
$$TC(Q)=\int(4Q-14)dQ=2Q^2-14Q+C;\quad TC(1)=12\Rightarrow C=24;$$
$$TC(Q)=2Q^2-14Q+24;$$

b) Iz funkcije prihoda dobijamo:
$$TR(P)=P\cdot Q\wedge TR(P)=4P-P^2\Rightarrow P\cdot Q=4P-P^2\Rightarrow Q(P)=4-P,\ P(Q)=4-Q;$$

c) Ukupne prihode u zavisnosti od količine proizvoda Q dobijamo kada cenu prikažemo kao funkciju od Q

$TR(Q) = P(Q)\cdot Q = (4-Q)\cdot Q = 4Q - Q^2;$

d) Nađimo funkciju dobiti:

$\pi(Q) = TR(Q) - TC(Q) = (4Q - Q^2) - (2Q^2 - 14Q + 24) = -3Q^2 + 18Q - 24;$

$\pi(Q) > 0 \Leftrightarrow -3Q^2 + 18Q - 24 > 0 \Rightarrow Q \in (2,4);$

Rentabilna proizvodnja se ostvaruje pri $Q \in (2,4)$.

f) Potražimo ekstremne vrednosti pomoću prvog izvoda:

$\pi'(Q) = -6Q + 18;\quad \pi'(Q) = 0 \Rightarrow Q = 3;$

Kako je $\pi''(Q) = -6$, to je i $\pi''(3) = -6 < 0$, dobit je maksimalna pri $Q = 3$ i iznosi $\pi(3) = -3\cdot 3^2 + 18\cdot 3 - 24 = 3$.

16. Funkcija ukupnih prihoda od nekog artikla (u zavisnosti od količine x) je data sa $TR(x) = ax^2 + bx$,

a) Odrediti parametre a i b ako $TR(10) = 425$, $TR'(10) = 55$.

b) Ako su ukupni troškovi dati sa $TC(x) = 2.25x^2 + 15x - 50$, odrediti interval rentabilne proizvodnje, optimalni obim proizvodnje i maksimalnu dobit.

Rešenje:

a)

$$TR(x) = ax^2 + bx$$

$$\left.\begin{aligned} &TR(10) = 425 \Rightarrow 100a + 10b = 425; \\ &TR'(10) = 55 \wedge TR'(x) = 2ax + b \Rightarrow 20a + b = 55 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 100a + 10b &= 425 \\ 200a + 10b &= 550 \end{aligned}\right\}$$

$$100a = 125 \Rightarrow a = 1{,}25 \quad b = 30$$

$$TR(x) = 1{,}25x^2 + 30x.$$

b) Funkcija dobiti:

$\pi(x) = TR(x) - TC(x) = (1{,}25x^2 + 30x) - (2.25x^2 + 15x - 50) = -x^2 + 15x + 50;$

Interval rentailne proizvodnje:

$\pi(x) > 0 \Leftrightarrow -x^2 + 15x + 50 > 0 \Rightarrow x \in (5,10);$

Optimalna proizvodnja:

$\pi'(x) = -2x + 15;\quad \pi'(x) = 0 \Rightarrow x = 3;$

$\pi''(x) = -2;\quad \pi''(3) = -2 < 0$ (max).

17. Date su funkcija marginalnih prihoda $TR'(P) = -8P + 4000$, funkcija marginalnih troškova $TC'(Q) = 0.5Q + 2000$ i prosečni troškovi pre obimu proizvodnje od 1000 jedinica proizvoda $AC(Q = 1000) = 16250$. Naći optimalni obim proizvodnje .

Rešenje:

Potražimo funkciju ukupnih prihoda na osnovu podataka koji su dati:

$$TR'(P) = -8P + 40000 \Rightarrow TR(P) = \int(-8P + 40000)dP = -4P^2 + 40000P + C$$

$$TR(0) = 0 \Rightarrow C = 0; \quad TR(P) = -4P^2 + 40000P;$$

Na osnovu dobijene funkcije, možemo naći vezu između količine proizvoda i cene:

$$TR(P) = P \cdot Q(P) = -4P^2 + 40000P = P \cdot (-4P + 40000) \Rightarrow$$

$$Q(P) = -4P + 40000; \quad P(Q) = -0.25Q + 10000;$$

Na osnovu dobijenog, možemo odrediti funkciju prihoda preko količine proizvoda

$$TR(Q) = Q \cdot P(Q) = Q \cdot (-0.25Q + 10000) = -0.25Q^2 + 10000Q;$$

Potražimo sada fumciju rashoda:

$$TC'(Q) = 0.5Q + 2000 \Rightarrow TC(Q) = \int(0.5Q + 2000)dQ = 0.25Q^2 + 2000Q + C;$$

Za određivanje konstante $C = TC(0)$ iskoristićemo funkciju prosečnih rashoda:

$$AC(Q) = \frac{0.25Q^2 + 2000Q + TC(0)}{Q} = 0.25Q + 2000Q + \frac{TC(0)}{Q}$$

$$AC(Q = 1000) = 16250 \Rightarrow 0.25 \cdot 1000 + 2000 \cdot 1000 + \frac{TC(0)}{1000} = 16250;$$

$$TC(0) = 14000000 = 14 \cdot 10^6;$$

$$TC(Q) = 0.25Q^2 + 2000Q + 14 \cdot 10^6;$$

Sada možemo da izračunamo i funkciju dobiti:

$$\pi(Q) = TR(Q) - TC(Q) = (-0.25Q^2 + 10000Q) - (0.25Q^2 + 2000Q + 14 \cdot 10^6);$$

$$\pi(Q) = -0.5Q^2 + 8000Q - 14 \cdot 10^6;$$

Optimalnu proizvodnju načalimo na osnovu prvog izvoda i ekstremnih vrednosti

$$\pi'(Q) = -Q + 8000; \quad \pi'(Q) = 0 \Rightarrow Q = 8000$$

$$\pi''(Q) = -1; \quad \pi''(8000) = -1 < 0 \quad (\max).$$

Dakle, optimalna proizvodnja se ostvaruje pri Q=8000.

18. Firma proizvodi da artikla x i y pri čemu je poznata funkcija dobiti u zavisnosti od fizičkog obima njihove proizvodnje $\pi = 32x - x^2 + 2xy - 2y^2 + 16y - 7$. Odrediti obim proizvodnje pri kome je dobit maksimalna.

Rešenje:

Odredimo prve parcijalne izvode i izjednačimo ih sa nulom:

$$\pi = 32x - x^2 + 2xy - 2y^2 + 16y - 7$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial x} = 32 - 2x + 2y; \quad \frac{\partial \pi}{\partial y} = 2x - 4y + 16;$$

$$\left.\begin{array}{r} -2x + 2y + 32 = 0 \\ 2x - 4y + 16 = 0 \end{array}\right\} -2y + 48 = 0 \Rightarrow y = 24, \quad x = 40$$

Odredimo druge parcijalne izvode

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial x^2} = -2; \quad \frac{\partial^2 \pi}{\partial y^2} = -4 \quad \frac{\partial^2 \pi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \pi}{\partial y \partial x} = 2;$$

$$\Delta = \frac{\partial^2 \pi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \pi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \pi}{\partial y \partial x} \cdot \frac{\partial^2 \pi}{\partial x \partial y} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 8 - 4 = 4 > 0$$

Zaključujemo da funkcija ima ekstremnu vrednost za $x = 40, y = 24$. Kako je $\frac{\partial^2 \pi}{\partial x^2} < 0$ zaključujemo da je u pitanju maksimum koji iznosi 825.

19. Funkcija tražnje ulaznica za finale fudbalskog kupa je data sa $Q_d(P) = 192 - P^2$. Odrediti elastičnost tražnje prema ceni. Odrediti cenu za koju je $E_{Q_d,P} = -1$. Koliko je ulaznica na raspolaganju za tu cenu?

Rešenje:

$$E_{Q_d,P} = \frac{P}{Q} \cdot Q'(P) = \frac{P}{192 - P^2} \cdot (-2P) = \frac{-2P^2}{192 - P^2};$$

$$E_{Q_d,P} = -1 \Rightarrow \frac{-2P^2}{192 - P^2} = -1 \Rightarrow -2P^2 = P^2 - 192 \Rightarrow P^2 = 64 \Rightarrow P = 8;$$

$$Q_d(8) = 192 - 64 = 128.$$

Pri ceni od osam novčanih jedinica, elastičnost tražnje prema ceni je -1. Pri toj ceni na raspolaganju je 128 ulaznica.

20. Data je funkcija tražnje u implicitnom obliku $4Q + P - 160 = 0$. Odrediti obim proizvodnje pri kome se ostvaruje maksimalan ukupan prihod (*TR*). Odrediti elatičnost prosečnih prihoda (*AR*) prema količini proizvoda za $Q = 30$.

Rešenje:

$$4Q + P - 160 = 0 \Rightarrow P = 160 - 4Q$$

$$TR(Q) = P(Q) \cdot Q = (160 - 4Q) \cdot Q = 160Q - 4Q^2;$$

$$TR'(Q) = 160 - 8Q; \quad TR'(Q) = 0 \Rightarrow Q = 20$$

$$TR''(Q) = -8, TR''(20) = -8 < 0 \quad \text{(max)}.$$

Elastičnost prosečnih prihoda prema količini proizvoda

$$AR(Q) = \frac{TR(Q)}{Q} = 160 - 4Q;$$

$$E_{AR,Q} = \frac{Q}{AR(Q)} \cdot AR'(Q) = \frac{Q}{160 - 4Q} \cdot (-4) = \frac{-4Q}{160 - 4Q};$$

$$E_{AR,Q=30} = \frac{-4 \cdot 30}{160 - 4 \cdot 30} = \frac{-120}{40} = -3.$$