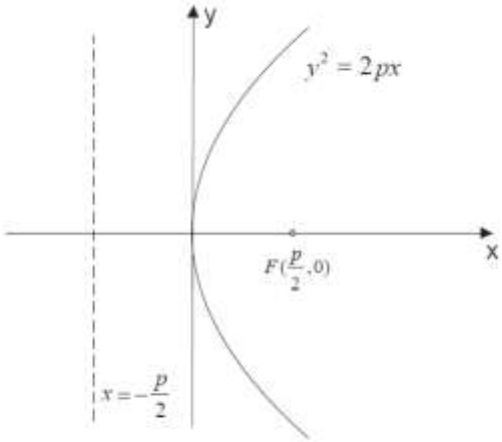
PARABOLA

Parabola je skup tačaka u ravni koje imaju osobinu da su jednako udaljene od žiže i direktrise $(d:\ x=-\frac{p}{2})$, $p>0$



p – parametar parabole (rastojanje žiže od direktrise)

$F(\frac{p}{2},0)$ – žiža

Jednačina parabole: $\boxed{y^2=2px}$ (1)

Prava $y=kx+n$ je tangenta parabole $y^2=2px$ ako je:

$\boxed{p=2kn}$ (2) – uslov tangentnosti

Tangenta na parabolu $y^2=2px$ u tački dodira $T(x_0,y_0)$ je

$$\boxed{y\cdot y_0=p\left(x+x_0\right)} \qquad (3)$$

Zadaci:

1. Odredi žižu i direktrisu parabole $y^2=6x$

<u>Rešenje:</u>

Iz jednačine parabole $y^2=6x$ vidimo da je $p=3$. Odatle sledi da su kordinate žiže $F\left(\frac{3}{2},0\right)$ a direktrisa d: $x=-\frac{3}{2}$

---

2. Napisati jednačinu parabole čiji je parametar 4

<u>Rešenje:</u>

$p=3$ pa je jednačina parabole, na osnovu (1) : $y^2=8x$

---

3. Napisati jednačinu parabole čije su koordinate žiže F(3,0)

<u>Rešenje:</u>

Pošto su koordinate žiže $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ sledi da je $\frac{p}{2}=3$, odnosno $p=6$. Pa je jednačina naše parabole $y^2=12x$

---

4. Na paraboli $y^2=16x$ naći tačku čije je rastojanje od žiže 13

<u>Rešenje:</u>

Iz jednačine parabole $y^2=16x$ vidimo da je $p=8$, odnosno koordinate žiže F(4,0).

Rastojanje tačke A(x,y) od žiže F(4,0) računamo po formuli:

$$d=\sqrt{(x-4)^2+(y-0)^2}=13$$

$$\sqrt{(x-4)^2+y^2}=13 \quad /^2$$

$$(x-4)^2+y^2=169$$

Ovde ćemo ubaciti jednačinu parabole $y^2=16x$

$(x-4)^2+16x-169=0$

$x^2-8x+16+16x-169=0$

$x^2-8x-153=0$

$$x_{1/2}=\frac{-8\pm\sqrt{64+612}}{2}=\frac{-8\pm\sqrt{676}}{2}=\frac{-8\pm 26}{2}$$

$x_1=-17 \qquad x_2=9$

Ovde dolazi u obzir samo pozitivno rešenje, tj. $x=9$

$y^2=16\cdot 9=144$

$y=\pm 12$

Pa su koordinate tačaka $A_1(9,12)$ i $A_2(9,-12)$

---

5. Naći jednačinu tangente parabole $y^2=8x$ koja je paralelna pravoj $2x+2y-3=0$

<u>Rešenje:</u>

Prvo određujemo koeficijent pravca date prave sa kojim naša tangenta treba da bude jednaka:

$2x+2y-3=0$

$2y=-2x+3 \quad /:2$

$$y=-x+\frac{3}{2} \qquad \Rightarrow \quad k_t=k=-1$$

Iz jednačine parabole $y^2=8x$ vidimo da je p=4. Sada pišemo uslov tangentnosti(2) da bi odredili n:

$4=2\cdot(-1)\cdot n$

$$n=\frac{4}{-2}=-2$$

Pa je jednačina tangente: $y=-x-2$

---

6. Napiši jednačine tangenti parabole $y^2=36x$ iz tačke A (2,9)

<u>Rešenje:</u>

Prvo ispitujemo da li tačka A pripada paraboli:

$9^2=36\cdot 2 \qquad\qquad 81\neq 72$

Pošto tačka ne pripada paraboli ubacujemo koordinate u jednačinu prave:

$9=2k+n \qquad \Rightarrow \quad n=9-2k$

Iz jednačine parabole $y^2=36x$ vidimo da je p=18, pa koristimo uslov tangentnosti (2):

$18=2k(9-2k)$

$18=18k-4k^2$

$4k^2-18k+18=0 \quad /:2$

$2k^2-9k+9=0$

$$k_{1/2}=\frac{9\pm\sqrt{81-72}}{4}=\frac{9\pm 3}{4}$$

$$k_1=3 \qquad k_2=\frac{3}{2}$$

$$n_1=9-2\cdot 3=3 \qquad n_2=9-2\cdot\frac{3}{2}=6$$

Pa su jednačine tangenti:

t_1: $y=3x+3$ i t_2: $y=\frac{3}{2}x+6$

---

7. Napisati jednačinu tangente iz tačke T(5,-10) na parabolu $y^2=20x$

<u>Rešenje:</u>

Prvo ispitujemo da li tačka T pripada paraboli:

$(-10)^2 = 20 \cdot 5 \qquad\qquad 100 = 100$

Pošto tačka T pripada paraboli možemo koristiti formulu za jednačinu tangente (3):

$-10y = 10(x+5)$

$-10y = 10x + 50 \quad / :(-10)$

Pa je jednačina naše tangente: $y = -x - 5$

Zadaci za vežbu:

1. Napisati jednačinu parabole ako su date koordinate njene žiže F(5,0)
2. Odrediti koordinate žiže i jednačinu direktrise sledićih parabola:
   a) $y^2 = 14x$ b) $y^2 = 20x$ c) $y^2 = -16x$
3. Napisati jednačinu parabole koja prolazi kroz tačku:
   a) A(1,-3) b) A(2,8) c) A(-4,1)
4. Napiši jednačine tangenti parabole $y^2 = 12x$ koje su paralelne sa pravom $3x - y - 4 = 0$
5. Napisati jednačinu tangente parabole $y^2 = 16x$ koja je normalna na pravu $x + 2y - 5 = 0$
6. Napisati jednačinu tangente parabole $y^2 = 4x$ u tački T(9,6)
7. Napisati jednačinu tangente parabole $y^2 = 6x$ u tački T(6,6)