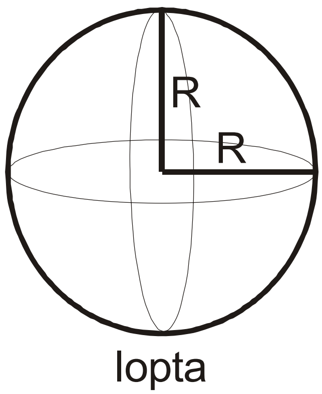
LOPTA

SFERA (LOPTA) i DELOVI LOPTE

$P = 4R^2\pi$ **$V = \frac{4}{3}R^3\pi$**



OVDE JE :
- **R je poluprečnik lopte**
- **h je visina zone (odsečka, isečka)**
- **r_1 i r_2 su poluprečnici presečnih krugova**

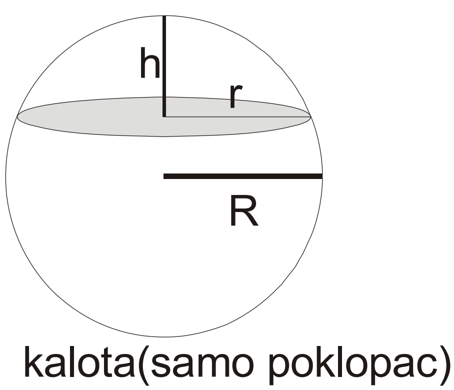
Površina kalote: $P = 2R\pi h$

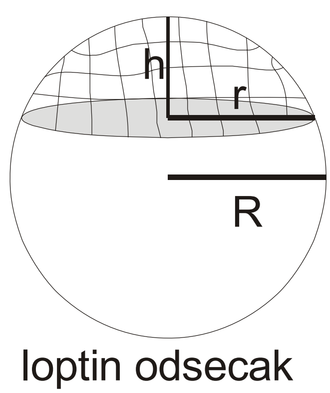
Površina zone : $P = 2R\pi h$

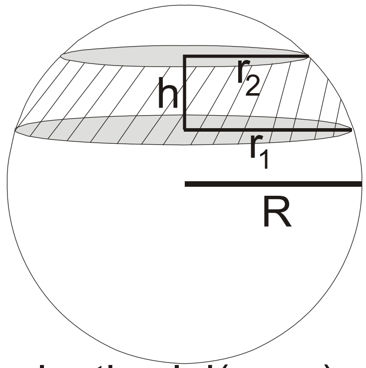
Zapremina loptinog odsečka: $V = \frac{\pi h^2}{3}(3R-h)$

Zapremina loptinog isečka: $V = \frac{2}{3}R^2\pi h$

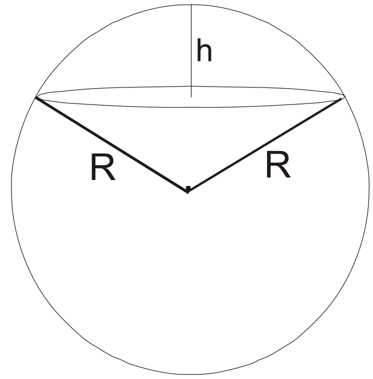
Zapremina loptinog sloja: $V = \frac{\pi h}{6}(3r_1^2+3r_2^2+h^2)$







loptin sloj(zona)



loptin isečak
odsečak + kupa

UZAJAMNI POLOŽAJ LOPTE I DRUGIH TELA

- Da bi se **u prizmu mogla upisati sfera** potrebno je i dovoljno da se **u njen normalni presek može upisati krug čiji je prečnik jednak visini prizme**

- Da bi se **u piramidu mogla upisati sfera** dovoljno je da **nagibni uglovi bočnih strana prema osnovi piramide budu jednaki**
- Ako se **oko poliedra može opisati sfera**, tada **njen centar leži u tački preseka simetralnih ravni svih ivica poliedra**

- Da bi se **oko prizme mogla opisati sfera** potrebno je i dovoljno da prizma **bude prava i da se oko njene osnove može opisati krug**.

- Da bi se **oko piramide mogla opisati sfera** potrebno je i dovoljno da **se oko njene osnove može opisati krug**

- **Lopta je upisana u prav valjak** ako **osnove i sve izvodnice valjka dodiruju loptu**. **To je moguće ako je prečnik osnove valjka jednak visini valjka**

- **Lopta je upisana u pravu kupu** ako **osnova i sve izvodnice kupe dodiruju loptu**. To je uvek mogućno!

- **Lopta je opisana oko valjka ako su osnove valjka preseci lopte**. Oko svakog pravog valjka može se opisati lopta

- **Lopta je opisana oko kupe ako je osnova kupe presek lopte i ako vrh kupe pripada odgovarajućoj sferi**. Oko svake kupe može se opisati lopta.

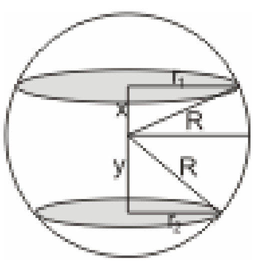
1) Površina lopte jednaka je 225π. Naći njenu zapreminu.

$$\frac{P = 225\pi}{V = ?}$$

$$P = 4R^2\pi$$
$$225\pi = 4R^2\pi$$
$$R^2 = \frac{225}{4}$$
$$R = \sqrt{\frac{225}{4}}$$
$$R = \frac{15}{2}$$
$$R = 7{,}5$$

$$V = \frac{4}{3}R^3\pi$$
$$V = \frac{4}{3}(7{,}5)^3\pi$$
$$V = 562{,}5\pi$$

2) Preseci dve ravni i lopte imaju površine 49π i 4π, a rastojanje izmedju tih ravni koje su sa raznih strana centra lopte iznosi 9. Naći površinu lopte.



$$P_1 = 49\pi$$
$$P_2 = 4\pi$$
$$h = 9$$
$$\overline{P_L = ?}$$

Preseci lopte su krugovi, pa ćemo odatle naći r_1 i r_2.

$$P_1 = r_1^2\pi \qquad P_2 = r_2^2\pi$$
$$49\pi = r_1^2\pi \qquad 4\pi = r_2^2\pi$$
$$r_1 = 7 \qquad r_2 = 2$$

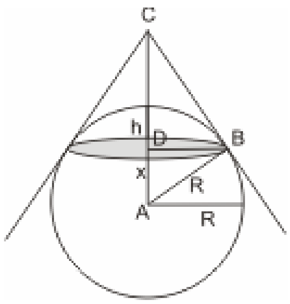
Uočimo dva pravougla trougla (na slici) čije su hipotenuze R a katete za jedan x i r_1 a za drugi y i r_2

$$\left.\begin{array}{l} R^2 = x^2 + r_1^2 \\ R^2 = y^2 + r_2^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x^2 + r_1^2 = y^2 + r_2^2 \\ x^2 + 49 = y^2 + 4 \\ 45 = (y-x)(y+x) \\ y - x = 5 \end{array}$$

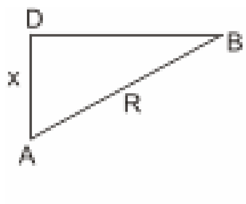
Sada je $y - x = 5 \;\wedge\; y + x = 9 \;\Rightarrow$ y = 7 zamenimo, pa je
$R^2 = 7^2 + 2^2 \Rightarrow R^2 = 53 \Rightarrow P = 4R^2\pi \Rightarrow P = 212\pi$

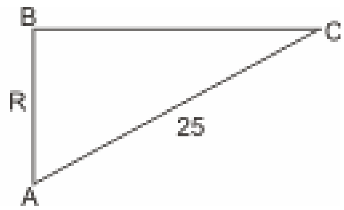
3) Poluprečnik lopte je 15. Koji se deo površine lopte vidi iz tačke koje je od centra lopte udaljena za 25?

Nacrtamo najpre sliku:



Trouglovi ABC i ABD su očigledno pravougli i slični.
Izvucimo ih na stranu!!!





Iz njihove sličnosti sledi proporcionalnost stranica:

$$x : R = R : 25$$
$$x : 15 = 15 : 25$$
$$25x = 225$$
$$x = 9$$

Pošto je $x + h = R$

$$\Downarrow$$
$$h = R - x$$
$$h = 15 - 9$$
$$h = 6$$

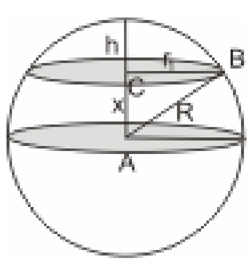
Površina koja se vidi je ustvari kalota visine $h = 6$

$$P_K = 2R\pi h = 2 \cdot 15 \cdot \pi \cdot 6$$
$$P_K = 180\pi$$

4) Izračunati zapreminu odsečka lopte ako je poluprečnik njegove osnove jednak 6, a poluprečnik lopte je 7,5

$$r_1 = 6$$
$$R = 7{,}5$$

Najpre i ovde nacrtamo sliku:



Iz pravouglog trougla ABC je: $X^2 = R^2 - r_1^2$

$$X^2 = 7{,}5^2 - 6^2$$
$$X = 4{,}5$$

Kako je $h + x = R$

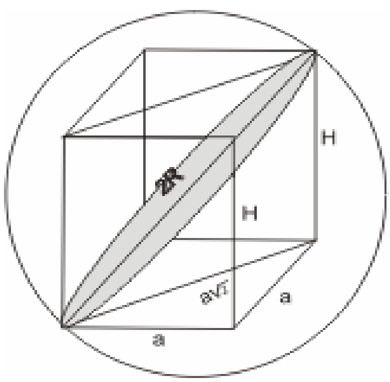
$$h = R - x$$
$$h = 7{,}5 - 4{,}5$$
$$h = 3$$

Zapremina odsečka je:

$$V = \frac{\pi h^2}{3}(3R - h)$$
$$V = \frac{\pi \cdot 3^2}{3}(3 \cdot 7{,}5 - 3)$$
$$V = 3\pi \cdot 19{,}5$$
$$V = 58{,}5\pi$$

5) Površina lopte opisane oko prave pravilne četvorostrane prizme osnovne ivice $a = 4$ je $P = 36\pi$. Izračunati površinu dijagonalnog preseka.

Nacrtajmo i ovde prvo sliku:

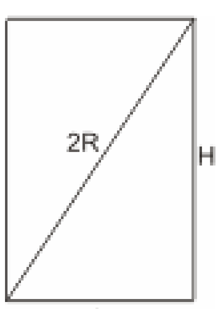


$$a = 4$$
$$P_L = 36\pi$$

Iz površine lopte ćemo izračunati poluprečnik:

$$P_L = 4R^2\pi$$
$$36\pi = 4R^2\pi$$
$$R^2 = 9$$
$$R = 3$$

Izvucimo ‘’na stranu’’ dijagonalni presek:



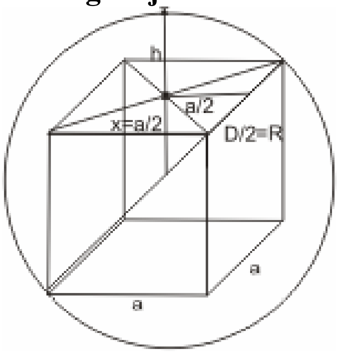
Odavde je:

$$H^2 = (2R)^2 - \left(a\sqrt{2}\right)^2$$
$$H^2 = 36 - \left(4\sqrt{2}\right)^2$$
$$H^2 = 36 - 32$$
$$H^2 = 4$$
$$H = 2$$

Površina dijagonalnog preseka je:

$$P = a\sqrt{2} \cdot H = 4\sqrt{2} \cdot 2$$
$$P = 8\sqrt{2}$$

6) Oko kocke površine $P = 32$ opisana je lopta. Izračunati zapreminu dela lopte iznad gornje strane kocke.



Pošto je površina kocke

$$P = 32 \Rightarrow \quad 6a^2 = 32$$
$$a^2 = \frac{32}{6}$$
$$a^2 = \frac{16}{3}$$
$$a = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Poluprečnik R lopte je očigledno jednak polovini telesne dijagonale $D = a\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3}$

$$D = 4$$

$$R = \frac{D}{2}$$
$$R = 2$$

Razmišljamo ovako:

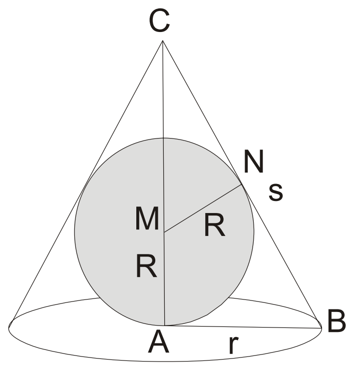
→ Ovakvih odsečka ima 6.
→ Nadjemo zapreminu lopte i zapreminu kocke
→ Oduzmemo ih i podelimo sa 6.

$$V_L = \frac{4}{3} R^3 \pi = \frac{4}{3} 2^3 \pi = \frac{32\pi}{3}$$
$$V_K = a^3 = \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{64 \cdot 3\sqrt{3}}{27} = \frac{64\sqrt{3}}{9}$$
$$V_L - V_K = \frac{32\pi}{3} - \frac{64\sqrt{3}}{9} = \frac{96\pi - 64\sqrt{3}}{9}$$
$$V_L - V_K = \frac{32\left(3\pi - 2\sqrt{3}\right)}{9}$$

Sad nam treba ovo kroz 6

$$V_{OD} = \frac{V_L - V_K}{6} = \frac{32\left(3\pi - 2\sqrt{3}\right)}{54}$$
$$V_{OD} = \frac{16}{27}\left(3\pi - 2\sqrt{3}\right)$$

7) U pravu kupu čija izvodnica ima dužinu 15 i čiji je poluprečnik osnove 9, upisana je lopta. Naći zapreminu lopte.



$$s = 15$$
$$r = 9$$
$$V_L = ?$$

$$H^2 = s^2 - r^2$$
$$H^2 = 15^2 - 9^2$$
$$H^2 = 225 - 81$$
$$H^2 = 144$$
$$H = 12$$

Iz sličnosti trouglova ABC i MNC dobijamo:

$$R : r = (H - R) : S$$
$$R : 9 = (12 - R) : 15$$
$$15R = 9(12 - R)$$
$$15R = 108 - 9R$$
$$24R = 108$$
$$R = \frac{108}{24} = \frac{9}{2}$$
$$R = \frac{9}{2}$$

$$V = \frac{4}{3} R^3 \pi$$
$$V = \frac{4}{3}\left(\frac{9}{2}\right)^3 \pi$$
$$V = \frac{243\pi}{2}$$